İkinci Türevi Preinveks Olan Fonksiyonlar İçin Hermite-Hadamard Tipli İntegral Eşitsizlikleri

İmdat İŞCAN*, Selim NUMAN*, Kerim BEKAR*

*Giresun Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Giresun, TÜRKİYE

Sorumlu yazar: imdat.iscan@giresun.edu.tr

Özet

Bu makalede, Hermite-Hadamard tipli eşitsizliklerin sağ tarafı ile ilgili bazı tahminleri ikinci türevlerinin mutlak değerleri preinveks olan fonksiyonlar için C koşulu altında genişlettik.

Anahtar Kelimeler: Hermite-Hadamard Eşitsizliği, İnveks küme, C koşulu, Preinveks fonksiyonlar.

Hermite-Hadamard Type Integral Inequalities For Functions Whose Second Derivative Are Preinvex

Abstract

In this paper, we extend some estimates of the right hand side of a Hermite-Hadamard type inequality under the condition C for functions whose second derivatives absolute values are preinvex.

Keywords: Hermite-Hadamard's inequality, invex set, Condition C, Preinvex functions.

Giriş

$a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$ ve $f:I\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

eşitsizliği Literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir. Bu eşitsizliğin son yıllarda birçok genelleştirilmesi yapılmıştır, önek olarak (Alomari ve ark., 2010; Dragomir ve ark.,1998; Dragomir ve ark., 2000) ve onların kaynakları verilebilir.
Aşağıdaki Lemma ikinci mertebeden türevlenebilir fonsiyonlar için ispatlandı (Dragomir ve ark., 2000):

Lemma 1. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° (I nın içi) üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $[a,b]\subset I^\circ$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{(b-a)^2}{2}\int_0^1 t(1-t)f''(ta+(1-t)b)dt, \tag{2}$$

eşitliği sağlanır.
Lemma 1'i kullanarak (Hussain ve ark., 2009)'de s-konvex fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard tipli eşitsizliği ispatladı:

Teorem 1. $f:I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I° üzerinde ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, $a,b\in I$, $a<b$ olmak üzere f'', $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olsun. Eğer sabit bir $s\in(0,1]$ ve $q\ge 1$ için $|f''|^q$ s-konveks ise $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{2.6^{\frac{1}{p}}}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{(s+2)(s+3)}\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{3}$$

Uyarı 1. a) (3) eşitsizliğinde s=1 alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|\le\frac{(b-a)^2}{12}\left[\frac{|f''(a)|^q+|f''(b)|^q}{2}\right]^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

b) (3) eşitsizliğinde s=1ve q=1 alınırsa

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| \le \frac{(b-a)^2}{12}\left[\frac{|f''(a)|+|f''(b)|}{2}\right] \tag{5}$$

Materyal ve Metotlar

Bu makalede, giriş kısmında bahsedilen (4) ve (5) numaralı eşitsizlikler C koşulu altında preinveks fonksiyonlar için elde edildi. Şimdi Sonuçlar ve Tartışma kısmında kullanılan bazı tanımları verelim.

Tanım 1. $K \subset \mathbb{R}^n$ ve $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için $x + t\eta(y,x) \in K$ ise K ya η ya göre inveks bir küme denir

Her konveks kümenin $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre invex olduğu açıktır. Fakat bunun tersi genelde doğru değildir, yani konveks olmayan inveks kümeler mevcuttur (Antczak, 2005).

Preinveks fonksiyonlar ilk kez Weir ve Mond tarafından aşağıdaki şekilde tanımlandı:

Tanım 2. $K \subset \mathbb{R}^n$ inveks bir küme, $f : K \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f\left(x + t\eta(y,x)\right) \le (1-t) f(x) + t f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye η ya göre preinveks fonksiyon denir. (Weir ve ark., 1998). Her konveks fonksiyon $\eta(y,x) = y - x$ fonksiyonuna göre preinveks fonksiyondur, ancak bunun tersi genelde doğru değildir.

η fonksiyonu üzerine aşağıdaki koşul Mohan ve Neogy tarafından konulmuştur (Mohan ve ark., 1995).

C Koşulu: $K \subset \mathbb{R}^n$**,** $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$' ya göre inveks bir küme olsun. $\forall x, y \in K$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} \eta\left(y, y + t\eta(x,y)\right) &= -t\eta(x,y) \\ \eta\left(x, y + t\eta(x,y)\right) &= (1-t)\eta(x,y) \end{aligned} \tag{6}$$

C koşulundan $\forall x, y \in K$ ve $t_1, t_2 \in [0,1]$ için

$$\eta\left(y + t_2\eta(x,y), y + t_1\eta(x,y)\right) = (t_2 - t_1)\eta(x,y).$$

Noor (Noor, 2007) preinveks fonksiyonlar için aşağıdaki Hermite-Hadamard eşitsizliğini ispatladı:

Teorem 2. $f:[a,a+\eta(b,a)]\to(0,\infty)$, $a,b\in K^{\circ}$, $a<a+\eta(b,a)$, K° deki reel sayıların bir aralığı üzerinde preinveks fonsiyon olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f\left(\frac{2a+\eta(b,a)}{2}\right)\le\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\le\frac{f(a)+f(a+\eta(b,a))}{2}\le\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Sonuçlar ve Tartışma

Lemma 2. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve f'', $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında integrallenebilir ise aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}&\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\\&=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\int_0^1 t(1-t)f''\left(a+t\eta(b,a)\right)dt\end{aligned}\qquad(7)$$

İspat. $a,b\in K$ ve $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks olduğundan $\forall t\in[0,1]$ için $a+t\eta(b,a)\in K$ dır. İspat Lemma 1 ile aynı olup, (7) eşitliğinin sağ tarafındaki integrale iki kez kısmi integrasyon uygulandığında eşitlik kolayca görülür.

Teorem 3. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $[a,a+\eta(b,a)]$ aralığında integrallenebilir olsun. $|f''|$, $[a,a+\eta(b,a)]$ üzerinde preinveks ve $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right| \leq \frac{\eta^{2}(b,a)}{12}\left(\frac{\left|f''\left(a\right)\right|+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|}{2}\right) \quad (8)$$

İspat. $\eta : K\times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun C koşulunu sağlaması durumunda (6) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} &\left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right| = \left|f''\left(a+\eta(b,a)+(1-t)\eta(a,a+\eta(b,a))\right)\right| \\ &\leq t\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right| + (1-t)\left|f''\left(a\right)\right| \end{aligned} \quad (9)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (7) eşitliği ve $|f''|$ nin preinveksliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} &\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right| \\ &= \frac{\eta^{2}(b,a)}{2}\int_{0}^{1}\left|t(1-t)\right|\left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|dt \\ &\leq \frac{\eta^{2}(b,a)}{2}\int_{0}^{1} t(1-t)\left[(1-t)\left|f''\left(a\right)\right| + t\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right]dt \\ &\leq \frac{\eta^{2}(b,a)}{2}\left\{\left(\left|f''\left(a\right)\right| + \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\right)\int_{0}^{1} t^{2}(1-t)dt\right\} \\ &= \frac{\eta^{2}(b,a)}{12}\left(\frac{\left|f''\left(a\right)\right|+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|}{2}\right) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 2. a.) (8) eşitsizliğinde $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa (5) eşitsizliği elde edilir.

b.) (8) eşitsizliğinde $|f''|$ nin preinveksliği kullanılırsa

$$\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right| \leq \left|f''\left(b\right)\right|$$

olduğundan (8) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right| \leq \frac{\eta^{2}(b,a)}{12}\left(\frac{\left|f''\left(a\right)\right|+\left|f''\left(b\right)\right|}{2}\right) \quad (10)$$

eşitsizliği elde edilir.

c.) Teorem 3 de, $\eta : K\times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı taktirde, $|f''|$ nin preinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (10) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4. $K \subset \mathbb{R}$, $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a, b \in K$, $a < a + \eta(b,a)$, $f : K \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $\left[a, a+\eta(b,a)\right]$ aralığında integrallenebilir ve $q > 1$ olsun. $|f''|^q$, $\left[a, a+\eta(b,a)\right]$ üzerinde preinveks ve $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left| \frac{f(a) + f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \leq \frac{\eta^2(b,a)}{12} \left(\frac{\left|f''(a)\right|^q + \left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{11}$$

İspat. (7) eşitliği, $|f''|^q$ için (9) eşitsizliği, $|f''|^q$ nin preinveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right| \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{2} \int_0^1 \left| t(1-t) \right|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \left| f''\left(a + t\eta(b,a)\right) \right| dt \\
&\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2} \left(\int_0^1 t(1-t)dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t(1-t) \left[(1-t)\left|f''(a)\right|^q + t\left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q \right] dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2.6^{\frac{1}{p}}} \left\{ \left(\left|f''(a)\right|^q + \left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q \right) \int_0^1 t^2(1-t)dt \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{2.6^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{\left|f''(a)\right|^q + \left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q}{12} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{\eta^2(b,a)}{12} \left(\frac{\left|f''(a)\right|^q + \left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3. a.) (11) eşitsizliğinde $\eta(b,a)=b-a$ alınırsa (4) eşitsizliği elde edilir.

b.) (11) eşitsizliğinde $|f''|$ nin preinveksliği kullanılırsa

$$\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\leq\left|f''(b)\right|$$

olduğundan (11) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right| \leq\frac{\eta^2(b,a)}{12}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^q+\left|f''(b)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{12}$$

eşitsizliği elde edilir.

c.) Teorem 4 de, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı taktirde, $|f''|$ nin preinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (12) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 5. $K\subset\mathbb{R}$, $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$'ya göre inveks ve açık bir küme, $a,b\in K$, $a<a+\eta(b,a)$, $f:K\to\mathbb{R}$ ikinci mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon, f'', $\left[a,a+\eta(b,a)\right]$ aralığında integrallenebilir ve $q>1$ olsun. $|f''|^q$, $\left[a,a+\eta(b,a)\right]$ üzerinde preinveks ve $\eta:K\times K\to\mathbb{R}$ fonksiyonu C koşulunu sağlıyorsa aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)}f(x)dx\right| \leq\frac{\eta^2(b,a)}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''(a)\right|^q+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{13}$$

İspat. (7) eşitliği, $|f''|^q$ için (9) eşitsizliği, $|f''|^q$ nin preinveksliği ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere

$$\left|\frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2}-\frac{1}{\eta(b,a)}\int_a^{a+\eta(b,a)} f(x)dx\right|$$

$$=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\int_0^1 |t(1-t)|\left|f''\left(a+t\eta(b,a)\right)\right|dt$$

$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\int_0^1 t^p(1-t)^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^1\left[(1-t)\left|f''\left(a\right)\right|^q+t\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right]dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left\{\left(\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q\right)\int_0^1 tdt\right\}^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\eta^2(b,a)}{2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\frac{\eta^2(b,a)}{8}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\left|f''\left(a\right)\right|^q+\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Burada

$$\int_0^1 (t-t^2)^p\,dt=\frac{2^{-1-2p}\sqrt{\pi}\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)}$$

ve

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty e^{-u}u^{\alpha-1}du$$

Gamma fonksiyonudur. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3. a.) (13) eşitsizliğinde $|f''|$ nin preinveksliği kullanılırsa

$$\left|f''\left(a+\eta(b,a)\right)\right|\leq\left|f''\left(b\right)\right|$$

olduğundan (13) eşitsizliğinden aynı zamanda

$$\left| \frac{f(a)+f\left(a+\eta(b,a)\right)}{2} - \frac{1}{\eta(b,a)} \int_{a}^{a+\eta(b,a)} f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{\eta^2(b,a)}{8} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(\frac{3}{2}+p)} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\left|f''(a)\right|^q + \left|f''(b)\right|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{14}$$

eşitsizliği elde edilir.

b.) Teorem 5 de, $\eta : K \times K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu üzerine C koşulu konulmadığı taktirde, $\left|f''\right|$ nin preinveksliği kullanılarak benzer ispat yöntemiyle yine (14) eşitsizliği elde edilir.

Kaynaklar

Alomari, M, Darus, M., ve Dragomir, S.S., 2010. New inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose second derivatives absolute values are quasiconvex, *Tamk. J. Math*. 41: 353-359.

Dragomir, S.S. ve Agarwal, R.P., 1998. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and teapezoidal Formula, *Appl. Math. Lett.* 11 (5): 91-95

Dragomir, S.S. ve Pearce, C.E.M., 2000. *Selected Topics and Applications,*RGMIA Monographs, Victoria University, 349pp. Australia.

Hussain, S., Bhatti, M.I. ve Iqbal, M., 2009, Hadamard type inequalities for s-convex functions, *Punjab Univ. Jour. Of Math.,* 41: 51-60.

Weir, T. ve Mond B., 1998. Preinvex functions in multiple objective optimization, *journal of Math. Analysis and Appl.* 136: 29-38.

Antczak, T., 2005. Mean value in invexity analysis, *Nonlinear Analysis*, 60: 1471-1484.

Mohan, S.R. ve Neogy, S.K., 1995. On invex sets and preinvex functions, *J. Math. Anal. Appl.* 189: 901-908.

Noor, M.A., 2007. Hermite-Hadamard integral inequalities for log-preinvex functions, *J. Math. Anal. Approx. Theory*, 2: 126-131.